et par suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$

b/ (V_n) est une suite géométrique de raison

$\frac{1}{2}\in]-1,1[\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = 0}$

On a : $V_n = \ln(U_n - 1)$

$\Leftrightarrow e^{V_n} = U_n - 1 \Leftrightarrow U_n = e^{V_n} + 1$

D'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} e^{V_n} + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 2}$$

Exercice 6

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}; x\in\mathbb{R}$$

$$U_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(x+\ln x)\,dx, n\in\mathbb{N}^*$$

a/ $f(x+\ln x) = \frac{e^{x+\ln x}}{1+e^{x+\ln x}} = \frac{e^x \times e^{\ln x}}{1+e^x \times e^{\ln x}}$

Or on sait que $e^{a+b} = e^a.e^b, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

et que : $e^{\ln r} = r, r > 0$

Finalement $f(x+\ln x) = \frac{xe^x}{1+xe^x}$

b/ $U_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(x+\ln x)\,dx$

$$= \frac{1}{n}\int_0^n \frac{xe^x}{1+xe^x}dx = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{(1+xe^x)'}{1+xe^x}dx$$

$$= \frac{1}{n}\left[\ln(1+xe^x)\right]_0^n = \frac{1}{n}\left[\ln(1+ne^n) - \ln(1+n)\right]$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\boxed{U_n = \frac{\ln(1+ne^n)}{n} - \frac{\ln(1+n)}{n}}$

c/ */ $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+ne^n)}{n} = ?$

On a:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+xe^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[xe^x\left(\frac{1}{xe^x}+1\right)\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln e^x}{x} + \frac{\ln\left(\frac{1}{xe^x}+1\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} + 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{xe^x}+1\right)}{x} = 0+1+0 = 1$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+ne^n)}{n} = 1$

*/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X-1}, X = x+1$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{\frac{\ln X}{X}}{\frac{X-1}{X}} = \frac{0}{1} = 0$$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = 0$

d/ $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+ne^n)}{n} - \frac{\ln(1+n)}{n} = 1$

Exercice 7

$$n\in\mathbb{N}^*,\ V_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

a/ $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$n \geq p \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \sqrt{p} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b/ on a: $\forall n \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow V_n \geq n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^* : V_n \geq \sqrt{n}$

c/ on a: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $V_n \geq \sqrt{n}$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty}$

Exercice 8